相加・相乗平均不等式の証明図と新しい一般証明
そして一般証明の双対性について

－よりよい理解を目指して－

岡山県倉敷市　岡山県立倉敷古城池高等学校　内田　康晴
e-mail:　haru@sqr.or.jp

０．要約

相加平均・相乗平均（・調和平均）の不等式の証明になっている図を 3 つ示す。

また、新しい、相加平均・相乗平均の不等式の一般証明を示す。それは、単純な構造をしていて、この不等式が成り立つ理由のひとつの直観的理解を与える。

さらに、この証明を含む一群の相加平均・相乗平均の不等式の証明の間にある双対性に注目する。

最後に、実際に生徒に教えるときのことを考え、上の一般証明の 2 項と 3 項の場合までのものを具体的に示した。煩雑さを避けられる上、同様にして一般の場合の証明が成立することが、自然に推察できる。

（短時間でご覧いただく場合：p8～p9 の「５ 高校生に」と P5 の「３(2)【補題３】の解釈」を是非ご覧下さい。）

１．はじめに

相加平均・相乗平均の不等式のよりよい理解のために、証明図と一般証明について考察した。

第 1 に証明図を３つ示した。証明図とは、相加平均・相乗平均の大小関係を、視覚的に表す図である。

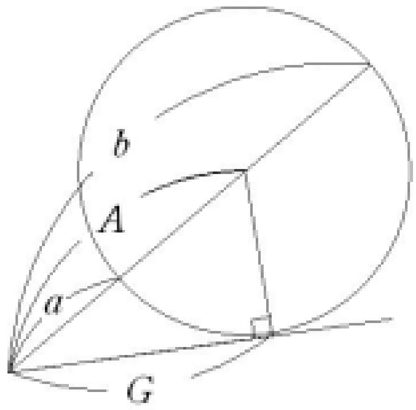
第 2 に、一般の場合の証明としては、コーシーの巧みな証明はじめ、70 以上が知られている（[2]参照）が、ここで新たな証明([1])を示す。そこでは、よく知られたある補題の単純な繰り返しの結果として、相加平均・相乗平均の不等式を導く。その補題は、直感的な解釈が可能なので、この証明により、相加平均・相乗平均の不等式がなぜ成り立つかの、ひとつの理解を得られる。

また、補題の不等式は、＋を×に、×を＋に置き換え、不等号の向きを逆にしても、やはり正しい不等式になる、つまり、双対性があることが知られている。第 3 に、(本質的に)この補題を用いたといえる相加平均・相乗平均不等式の証明は複数あり、それらの証明自体の間に双対性が存在することを指摘する。

最後に、実際に生徒に教えるときのことを考え、上の一般証明の 2 項と 3 項の場合までの場合を具体的に示した。煩雑さを避けられる上、同様にして一般の場合の証明が成立することが、自然に推察できる。

2．相加平均・相乗平均の証明図

(1) （方べきの定理を利用するもの：[7]にすでに掲載されていた。）



中心は直径の中点だから $A=\dfrac{a+b}{2}$ ：相加平均

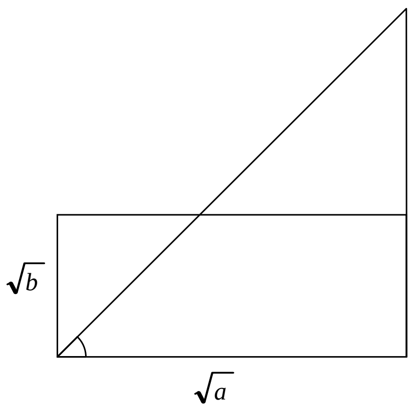
方べきの定理より $G=\sqrt{ab}$ ：相乗平均

直角三角形の斜辺≥他の一辺

より

$$A \geq G$$

(2)（知られている([8])ものの高次元化）

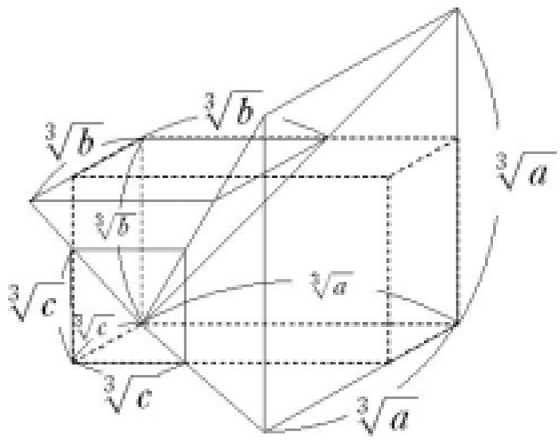


2 個の直角 2 等辺三角形の面積の和

≥ 長方形の面積

より

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$



3 個の四角錐の体積の和

≥直方体の体積

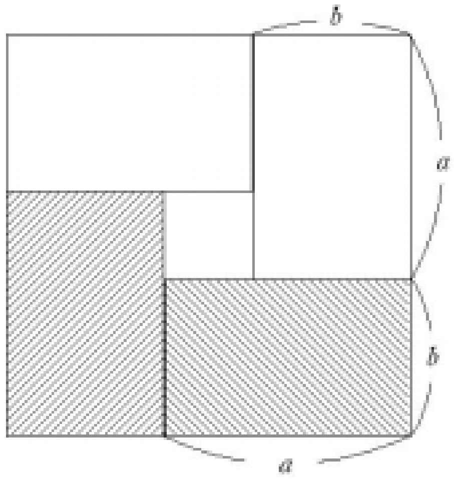
より

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

同様に、n次元に拡張可能である。

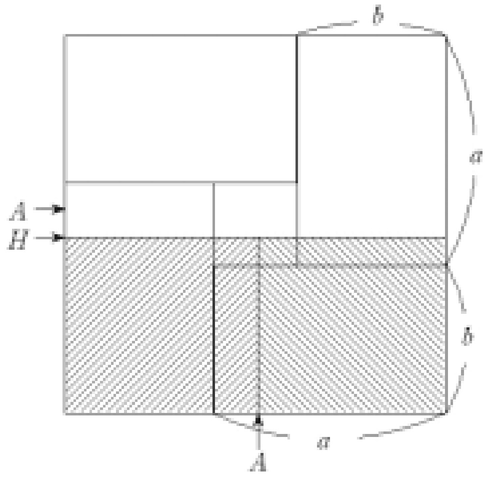
(3)（調和平均も含めた大小関係が示せるもの＝知られているもの([7]参照)と同じ図であるが、視点が異なる）

（ｱ）



4 つの長方形を組み合わせて正方形をつくる。そのうち 2 個分の面積は、正方形の面積の半分以下である。

(ｲ)　2 個の長方形の面積を正方形の下方に移動させる。



「正方形の高さの半分 $A \geq$ 斜線部の高さ H 」である。

ここで、

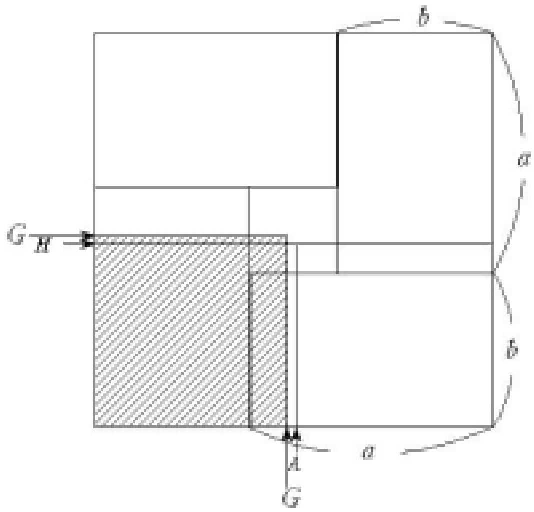
$A = \dfrac{a+b}{2}$ ：相加平均

斜線の長方形は、面積 $2ab$

横の長さ $a+b$ だから

$H = \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$ ：調和平均

(ｳ)　左下の、縦の長さ H 横の長さ A で面積 ab の長方形を、面積の等しい正方形に変形する。



正方形の 1 辺の長さを G とすると

$A \geq G \geq H$

ここで、$G = \sqrt{ab}$ ：相乗平均

3．(1) 一般証明

【定理１】(相加平均・相乗平均の不等式)

$A_1, A_2, \cdots A_n > 0$ のとき

$$\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n} \ge \sqrt[n]{A_1 A_2 \cdots A_n}$$

（等号成立は、$A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ のとき）

$a_i = \sqrt[n]{A_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$　とおき、両辺に n をかけると、同値な【定理２】が得られる

【定理２】　$a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ のとき

$$a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_n{}^n \ge n a_1 a_2 \cdots a_n$$

(等号成立は、$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき)

これを証明するため、よく知られた次の【補題３】を用いる。

【補題３】$a_1 \ge a_2$, $b_1 \ge b_2$ のとき

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \ge a_1 b_2 + a_2 b_1 \quad \cdots ①$$

（証明）$(a_1 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) = a_1(b_1 - b_2) - a_2(b_1 - b_2) = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \ge 0$

（証明終わり）□

【補題３】を繰り返し用いて、【定理２】を証明する。数学的帰納法の形にも書けるが、ここでは、より簡略に記述する。

（【定理２】の証明）$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n > 0$ と仮定しても、一般性を失わない。

不等式の左辺の最後の項の因子 a_n を、手前の各項の因子 $a_{n-1}, \cdots, a_1$ とこの順に交換する。

各段階で【補題３】の仮定がみたされているので、式の値は大きくならない。

$$a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_n{}^n$$

$$= a_1 \cdots a_1 + a_2 \cdots a_2 + \cdots\cdots + a_{n-1} \cdots \underline{a_{n-1}} + a_n \cdots \underline{a_n} a_n$$

$$\ge a_1 \cdots a_1 + a_2 \cdots a_2 + \cdots\cdots + a_{n-1} \cdots a_{n-1} \underline{a_n} + a_n \cdots a_n \underline{a_{n-1}} a_n$$

・・・・・

$$\ge a_1 \cdots a_1 + a_2 \cdots a_2 + \cdots + a_i \cdots a_i \underline{a_i} + a_{i+1} \cdots a_{i+1} a_n + \cdots + a_n \cdots a_n \underline{a_n} a_{i+1} \cdots a_n$$

$\underbrace{a_i \cdots a_i}_{(n-1)\text{個}} \ge \underbrace{a_n \cdots a_n}_{(i-1)\text{個}} a_{i+1} \cdots a_n$ かつ $a_i \ge a_n$ だから【補題３】より

$$\ge a_1 \cdots a_1 + a_2 \cdots a_2 + \cdots + a_i \cdots a_i \underline{a_n} + a_{i+1} \cdots a_{i+1} a_n + \cdots + a_n \cdots a_n \underline{a_i} a_{i+1} \cdots a_n$$

・・・・・・

$$\geq a_1 \cdots a_1 \underline{a_n} + a_2 \cdots a_2 \underline{a_n} + \cdots\cdots + a_{n-1} \cdots a_{n-1} \underline{a_n} + \underline{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} a_n$$

同様に最後から 2 番目の項の因子 a_{n-1} を、手前の各項の因子 $a_{n-2}, \cdots, a_1$ とこの順に交換する。

以下同様に因子の交換をしていくと

$$\geq a_1 a_2 \cdots a_n + a_1 a_2 \cdots a_n + \cdots\cdots + a_1 a_2 \cdots a_n + a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$= n a_1 a_2 \cdots a_n$$ (不等式本体の証明終わり)

<u>等号成立について</u>。【補題３】と同様に次の【補題３＊】が成立する。 □

【補題３＊】 $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$ のとき

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 > a_1 b_2 + a_2 b_1$$

【定理２】の証明の中で、$a_1 > a_n$ であった場合は、a_1 と a_n を交換する段階で、＞が成り立ち、最後の結論でも、≥ではなく、＞となる。よって、等号成立は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときのみである。 (証明終わり)□

<u>(2) 【補題３】の解釈</u>

(ｱ) 使うための解釈

【補題３】 $a_1 \geq a_2$, $b_1 \geq b_2$ のとき

$$a_1 \underline{b_1} + a_2 \underline{b_2} \geq a_1 \underline{b_2} + a_2 \underline{b_1} \quad \cdots ①$$

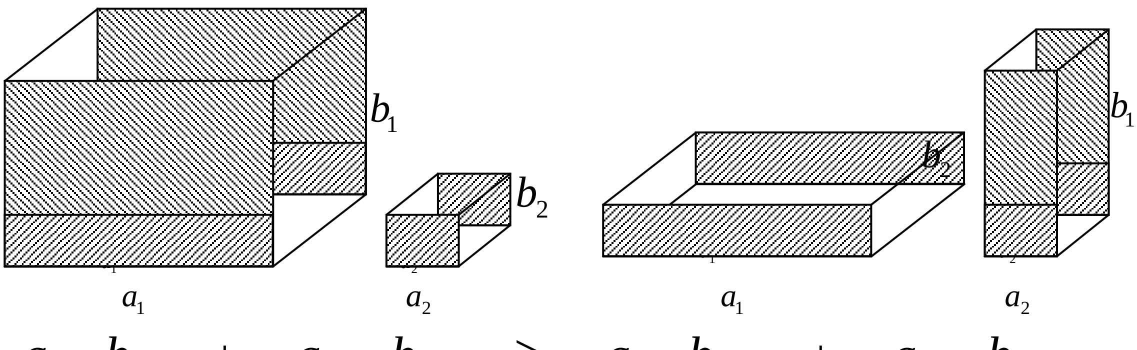
[大]<u>(大)</u>＋[小]<u>(小)</u> ≥ [大]<u>(小)</u>＋[小]<u>(大)</u>

：「大小が互い違いになるように、大小を交換すると、式の値は小さくなる。」

(ｲ) 【補題３】がなぜ成り立つかを理解するための解釈

「広い敷地（面積 a_1）と狭い敷地（面積 a_2）に、屋根をつけて倉庫を作る。

屋根は、一方に高い屋根（高さ b_1）、他方に低い屋根（高さ b_2）を作るとする。倉庫の容積をなるべく大きくするには、どのように屋根を作ればよいか。」



$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1$$

[大] (大) ＋ [小] (小) **[大] (小) ＋ [小] (大)**

：広い敷地の方の屋根を高くした方が倉庫の容積を大きくできることは明らかである。

４．双対性

次の補題が成立する。

【補題４】 $a_1 \geq a_2$, $b_1 \geq b_2$ のとき

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2) \leq (a_1+b_2)(a_2+b_1) \quad \cdots ②$$

（証明）両辺を展開し、共通な項を消去すると、【補題３】と一致する。（証明終り）

②と①は「＋を×に、×を＋に置き換え、不等号の向きを逆にした」関係にある。

【補題３】は、再配列不等式と呼ばれるもののもっとも単純な場合であり、それについて【補題４】のような双対が存在することは知られている。

ここで、みたいのは上記の【定理２】の証明全体の双対を考えることができ、それがまた相加平均・相乗平均の不等式の証明になることである。

【定理２】の証明の「＋を×に、×を＋に置き換え、不等号の向きを逆にする」。

■（【定理２】の双対的証明）

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ と仮定しても、一般性を失わない。

不等式を下のように書き表し、最後の因子の項 a_n を、手前の各因子の項 $a_{n-1},\cdots,a_1$ とこの順に交換する。

各段階で【補題４】の仮定がみたされているので、式の値は小さくならない。

$$(a_1+\cdots+a_1)(a_2+\cdots+a_2)\cdots\cdots(a_{n-1}+\cdots+a_{n-1}+\underline{a_{n-1}})(a_n+\cdots+\underline{a_n}+a_n)$$

$$\leq \quad (a_1+\cdots+a_1)(a_2+\cdots+a_2)\cdots\cdots(a_{n-1}+\cdots+a_{n-1}+\underline{a_n})(a_n+\cdots+\underline{a_{n-1}}+a_n)$$

・・・・・

$$\leq (a_1+\cdots+a_1+\underline{a_n})(a_2+\cdots+a_2+\underline{a_n})\cdots\cdots(a_{n-1}+\cdots+a_{n-1}+\underline{a_n})(\underline{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}+a_n)$$

さらに、最後から２番目の因子の項 a_{n-1} を、手前の各因子の項 $a_{n-2},\cdots,a_1$ とこの順に交換する。・・・・・とすることにより、

$$\leq (a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdots\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

従って、
$$n^n a_1 a_2 \cdots a_n \leq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^n$$

両辺の正の n 乗根をとり、n で割って

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$ （証明終わり）□

この証明は、Steffensen によって 1930 年に発表されたもの(原論文[5],[6], [3]p25,[2]p91 に収録)と、本質的に同じものである。

このほかにも、（たとえ表記が異なっていても）【補題３】あるいは、【補題４】を用いたといえる証明は数多くあり、それらの間にも、双対性が見てとれる。以下、いくつか挙げることにする。

（例２）

1967 年の Guha の証明(原論文[9],[2]p102 に収録)は、Steffensen の証明と似ているが、式変形の出発が、相加平均側であることと項の交換の順番が異なる。双対性をクローズアップするための若干の表現の変更を加えて、中心部分を取り出す。

■下記の式の先頭の因子の項 $a_2,\cdots,a_n$ を 2 番目以降の因子の項 a_1 と順次交換していく。

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdots\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

$$\geq (a_1+a_1+\cdots+a_n)(a_2+a_2+\cdots+a_n)\cdots\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

・・・・・・・

$$\geq (a_1+a_1+\cdots+a_1)(a_2+a_2+\cdots+a_n)\cdots\cdots(a_{n-1}+a_2+\cdots+a_n)(a_n+a_2+\cdots+a_n)$$

さらに 2 番目の因子の項 $a_3,\cdots,a_n$ を 3 番目以降の因子の項 a_2 と順次交換していく。

以下同様

・・・・・・・

$$\geq (a_1+a_1+\cdots+a_1)(a_2+a_2+\cdots+a_2)\cdots\cdots(a_{n-1}+a_{n-1}+\cdots+a_{n-1})(a_n+a_n+\cdots+a_n) \square$$

この証明の双対は、次のようになる。

■ $na_1a_2\cdots a_n$

$$= a_1a_2\cdots a_n + a_1a_2\cdots a_n + \cdots\cdots + a_1a_2\cdots a_n + a_1a_2\cdots a_n$$

$$\leq a_1a_1\cdots a_n + a_2a_2\cdots a_n + \cdots\cdots + a_1a_2\cdots a_n + a_1a_2\cdots a_n$$

$$\leq a_1a_1\cdots a_1 + a_2a_2\cdots a_n + \cdots\cdots + a_{n-1}a_2\cdots a_n + a_na_2\cdots a_n$$

・・・・・・

$$\leq a_1a_1\cdots a_1 + a_2a_2\cdots a_2 + \cdots\cdots + a_{n-1}a_{n-1}\cdots a_{n-1} + a_na_n\cdots a_n$$

$$= a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_n{}^n \qquad \square$$

この証明は、最初に与えたものと類似であるが、発表されたものの中には見あたらなかった。

（例３）Ehlers の証明（[2],[3],[8]）と伊藤敦元氏の証明([4])

■ Ehlers は $b_i = \dfrac{a_i}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\ (i=1,2,\cdots,n)$ とおいて $b_1b_2\cdots b_n = 1$ つまり相乗平均を 1 にする標準化をおこなった後、次のように考える。もし、$b_1,b_2,\cdots,b_n$ のすべてが同じ値ではないとすると、少なくともひとつは 1 より大きく、ひとつは 1 より小さい。今、$b_1>1,\ 1>b_2$ であるとすると、

$$b_1+b_2 = b_1\cdot 1 + 1\cdot b_2 > b_1b_2 + 1\cdot 1 = 1 + b_1b_2 \quad \cdots ⑤$$

（仮定を“ ≥ ”にすれば、結論も“ ≥ ”：【補題 3】）

項の順番を適当に変えながら、これを繰り返し用いて、

$$b_1+b_2+\cdots+b_n \geq 1+b_1b_2+b_3+\cdots+b_n \geq 1+1+b_1b_2b_3+\cdots+b_n \geq \cdots \geq 1+1+\cdots+1+b_1\cdots b_n = n$$

これから、相加平均・相乗平均の不等式が得られる。 □

これの双対証明は、次のようなものである。

■　$c_i = \dfrac{a_i}{\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n}}$　$(i = 1,2,\cdots,n)$ という標準化を行うと、$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = n$ で

相加平均は 1 になる。

もし、$c_1, c_2, \cdots, c_n$ のすべてが同じ値ではないとすると、少なくともひとつは 1 より大きく、ひとつは 1 より小さい。

今、$c_1 > 1,\ 1 > c_2$ であるとすると、$1 > c_2, c_1 - 1 > 0$ であり、

$$c_1 c_2 = \{1 + (c_1 - 1)\}(c_2 + 0) < (1 + 0)\{c_2 + (c_1 - 1)\} = 1 \cdot (c_1 + c_2 - 1) \quad \cdots ⑥$$

（仮定を“ ≤ ”にすれば、結論も“ ≤ ”：【補題４】）

項の順番を適当に変えながら、これを繰り返し用いて、

$$c_1 c_2 \cdots c_n \leq 1 \cdot (c_1 + c_2 - 1) c_3 \cdots c_n \leq \cdots \leq 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 \cdot \{c_1 + c_2 + \cdots + c_n - (n-1)\} = 1$$

これから、相加平均・相乗平均の不等式が得られる。　□

これは、伊藤敦元氏の証明([4])に本質的に通じるものである。（伊藤氏の証明は、高校生にわかりやすくという趣旨のためと思われるが、標準化をしていないほかまとめ方も異なる。）

５．高校生に

標準的な生徒に示す場合、次のように、2 項の場合と 3 項の場合をこの方法で示すことも考えられる。この 2 つの場合が理解できれば、同様にして何項の場合でも証明できることが感じ取れると思う。

【補題３】$a_1 \geq a_2,\ b_1 \geq b_2$ のとき

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1 \quad \cdots ①$$

を用いて、

【２項の場合】

任意の（正の）数 a, b に対して、$a^2 + b^2 \geq 2ab$　$\cdots$ ③

を示す。

■（証明）$a \geq b$ としても一般性を失わない。【補題３】より

$$a^2 + b^2 = a\underline{a} + b\underline{b} \geq a\underline{b} + b\underline{a} = 2ab$$

補題で、仮定が > なら結論も > だから、この定理についても、仮定が > なら結論も > である。つまり、等号が成り立つのは $a = b$ のときに限る。　□

任意の正の数 A, B に対して $a = \sqrt{A}, b = \sqrt{B}$ とおけば、③は相加平均・相乗平均の不等式を与える。

【３項の場合】

任意の（正の）数a,bに対して、$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$ ・・・ ④

（証明）$a \geq b \geq c > 0$としても一般性を失わない。

すると、【補題３】が繰り返し適用できる。

$$a^3+b^3+c^3 = aaa+bb\underline{b}+c\underline{c}c$$

$bb \geq cc, b \geq c$なので $\geq aa\underline{\underline{a}}+bb\underline{c}+\underline{\underline{c}}bc$

$aa \geq bc, a \geq c$なので $\geq aa\underline{\underline{c}}+bbc+\underline{\underline{a}}bc$

$$= (\underline{a^2+b^2})c + abc$$

２項の場合より $\geq \underline{2ab}c+abc$

$= 3abc$ □

任意の正の数A,B,Cに対して$a=\sqrt[3]{A}, b=\sqrt[3]{B}, c=\sqrt[3]{C}$とおけば、④は相加平均・相乗平均の不等式を与える。

６．補足

Ehlers の証明と伊藤敦元氏の証明の双対性をよりはっきりさせるためには、補題に当たる⑤と⑥を次のように見る必要がある。

⑤は $\frac{b_1}{1}\cdot 1+1\cdot b_2 \geq \frac{b_1}{1}\cdot b_2+1\cdot 1 = 1+b_1\cdot b_2$

⑥は $\{(c_1-1)+1\}(0+c_2) \leq \{(c_1-1)+c_2\}(0+1) = 1\cdot(c_1+c_2-1)$

Ehlers は標準化しているので相乗平均を表す１と積の単位元を表す１を含んでいる。同じ１でも相乗平均を表す１の双対は、相加平均を表す１になり、積の単位元を表す１は、和の単位元を表す０になる。

【文献】

[1] Y. Uchida, **A Simple Proof of the Geometric-Arithmetic Mean Inequality**, Pure Appl. Math. V9 i2. 2008

[2] P.S. BULLEN, *Handbook of Means and Their Inequalities,* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.

[3] G.H.ﾊｰﾃﾞｨ, J.E.ﾘﾄﾙｳｯﾄﾞ, G. ﾎﾟｰﾔ, 「不等式」,ｼｭﾌﾟﾘﾝｶﾞｰﾌｪｱﾗｰｸ東京

[4] 伊藤 敦元, 相加平均≧相乗平均の初等的証明, 日本数学教育学会誌 Vol.70, No.3(19880301) pp. 85-87

[5] J.F.Steffensen:Et Bevis for Saetningen om,at det geometriske Middietal at positive Storrelser ikke

storre end det aritmetiske, Mat. Tidsskrift, A(1930),115-116

[6] J.F.Steffensen:The geometrical mean, J.Inst. Actuar., 62(1931),117-118;[91].

[7] ロジャー・Ｂ ニールセン. 「証明の展覧会〈１〉,〈2〉眺めて愉しむ数学」 [原書名：PROOFS WITHOUT WORDS〈Nelsen, Roger B.〉 東海大学出版会 秋山　仁・奈良　知恵・酒井　利訓【訳】

[8] 大関信雄,青柳雅計, 「不等式」, 槇書店

[9] U.C.Guha: Arithmetic mean-geometric mean inequality, Math. Gaz.,51(1967),145-146;[102].