2026年　東京大学　理科第6問

6 問題　n を正の整数とする。n の正の約数のうち，3 で割って1余るものの個数を $f(n)$，3で割って2余るものの個数を $g(n)$ とする。

(1) $f(2800)$，$g(2800)$ を求めよ。

(2) $f(n) \geqq g(n)$ を示せ。

(3) $g(n)=15$ であるとき，$f(n)$ がとりうる値を求めよ。

解答 (1)　$2800=2^4\cdot 5^2\cdot 7$ であるから

2800 の正の約数は，$\{2^a\cdot 5^b\cdot 7^c \mid a,b,c\in\mathbf{Z}, 0\leqq a\leqq 4, 0\leqq b\leqq 2, 0\leqq c\leqq 1\}$

よって　正の約数の総数は　$5\times3\times2=30$（個）

正の約数について

$$2^a\cdot 5^b\cdot 7^c \equiv (-1)^a(-1)^b\cdot 1^c \equiv (-1)^{a+b} \equiv \begin{cases} 1 & (a+b\text{が偶数}) \\ -1 & (a+b\text{が奇数}) \end{cases} \quad (mod3)$$

$a+b$ が偶数の (a,b,c) の個数は　（週、週、c）…　$3\times2\times2=12$　（個）

（奇、奇、c）…　$3\times1\times2=4$　（個）

よって　$f(2800)=12+4=16$

$g(2800)=30-16=14$

(2) n の素因数分解を　$n=a_1{}^{k_1}\cdots a_s{}^{k_s} b_1{}^{l_1}\cdots b_t{}^{l_t}\cdot 3^u$

ただし，k_1，…，k_s，l_1，…，$l_t\in\mathbf{N}$

a_1，…，$a_s\equiv1$　$(mod3)$

b_1，…，$b_t\equiv-1$　$(mod3)$

$s,t,u\in\{0\}\cup\mathbf{N}$　（$s,t=0$はその素因数が無いことを表すとする）

とする。3で割り切れない正の約数の総和は

$$(a_1{}^0+a_1{}^1+\cdots+a_1{}^{k_1})\cdots\cdots(a_s{}^0+a_s{}^1+\cdots+a_s{}^{k_s})(b_1{}^0+b_1{}^1+\cdots+b_1{}^{l_1})\cdots\cdots(b_t+b_t{}^1+\cdots+b_t{}^{l_t})$$

の展開式で与えられる。よって，正の約数について，3で割って1余るものを1，3で割って2余るものを-1で置き換えたものの総和は

$f(n)-g(n)$

$=(1^0+1^1+\cdots+1^{k_1})\cdots\cdots(1^0+1^1+\cdots+1^{k_s})$

$\{(-1)^0+(-1)^1+\cdots+(-1)^{l_1}\}\cdots\cdots\{(-1)^0+(-1)^1+\cdots+(-1)^{l_t}\}$

$=(k_1+1)\cdots\cdots(k_s+1)\times\dfrac{1-(-1)^{l_1+1}}{2}\times\cdots\cdots\times\dfrac{1-(-1)^{l_t+1}}{2}$　…(＊)

$\geqq0$　（ただし，$s=0$ のとき $(k_1+1)\cdots\cdots(k_s+1)=1$ とする。以下も同様）

よって　$f(n)\geqq g(n)$　…終

(3)　$t=0$ のとき，すべての正の約数は3で割って1余り，$g(n)=0$。いま $g(n)=15$ より，$t\geqq1$

正の約数について，3で割って1余るものを1，3で割って2余るものも1で置き換えたものの総和すなわち，3で割り切れないものの個数は

$f(n)+g(n)$

$=(1^0+1^1+\cdots+1^{k_1})\cdots\cdots(1^0+1^1+\cdots+1^{k_s})(1^0+1^1+\cdots+1^{l_1})\cdots\cdots(1^0+1^1+\cdots+1^{l_t})$

$=(k_1+1)\cdots\cdots(k_s+1)(l_1+1)\cdots\cdots(l_t+1)$　…①

[1] (2)の l_1，……，l_tの中に奇数があるとき，(＊)より

$f(n)-g(n)=0$ から　$f(n)=g(n)=15$

このとき①より　$(k_1+1)\cdots\cdots(k_s+1)(l_1+1)\cdots\cdots(l_t+1)=30$

これを満たすものの一つは　$s=t=1$，$k_1=4, l_1=5$

[2] l_1，……，l_tがすべて偶数のとき，(＊)より

$f(n)-g(n)=(k_1+1)\cdots\cdots(k_s+1)$　……②

①−②より

$2g(n)=(k_1+1)\cdots\cdots(k_s+1)\{(l_1+1)\cdots\cdots(l_t+1)-1\}$

$g(n)=15$ のとき

$(k_1+1)\cdots\cdots(k_s+1)\{(l_1+1)\cdots\cdots(l_t+1)-1\}=2\cdot3\cdot5$

ここで　l_1，……，l_tがすべて偶数であるから，$\{(l_1+1)\cdots\cdots(l_t+1)-1\}$ は偶数である。

また，$g(n)\neq0$より $t\geqq1$ であり，$\{(l_1+1)\cdots\cdots(l_t+1)-1\}\geqq2$である。よって，

$((k_1+1)\cdots\cdots(k_s+1), \{(l_1+1)\cdots\cdots(l_t+1)-1\})=(1,30),(3,10),(5,6),(15,2)$　……③

②より　$f(n)=(k_1+1)\cdots\cdots(k_s+1)+g(n)=(k_1+1)\cdots\cdots(k_s+1)+15$

であるから

$f(n)=16,18,20,30$

以下，これらを満たす場合があることを示す。

③より　$((k_1+1)\cdots\cdots(k_s+1), (l_1+1)\cdots\cdots(l_t+1))=(1,31),(3,11),(5,7),(15,3)$

$s=0$，$t=1$ で　$l_1+1=31$　すなわち　$l_1=30$

$s=1$，$t=1$ で $(k_1+1, l_1+1)=(3,11),(5,7),(15,3)$

すなわち $(k_1, l_1)=(2,10),(4,6),(14,2)$

の場合が，条件を満たす。　すなわち

$f(n)=16$　…　$s=0$，$t=1$，$l_1=30$

$f(n)=18$　…　$s=1$，$t=1$，$k_1=2$，$l_1=10$

$f(n)=20$　…　$s=1$，$t=1$，$k_1=4$，$l_1=6$

$f(n)=30$　…　$s=1$，$t=1$，$k_1=14$，$l_1=2$

以上のことから $f(n)=15,16,18,20,30$ …答